

Reg. No. :

Code No. : 20577 B Sub. Code : SMMA 54

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2021.

Fifth Semester

Mathematics — Main

TRANSFORMS AND THEIR APPLICATIONS

(For those who joined in July 2017 onwards)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — ($10 \times 1 = 10$ marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1. $F[f(ax)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

(A) $F\left(\frac{s}{a}\right)$ (B) $\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

(C) $aF\left(\frac{s}{a}\right)$ (D) $\frac{1}{a}F\left(\frac{a}{s}\right)$

$F[f(ax)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

(a) $F\left(\frac{s}{a}\right)$ (b) $\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

(c) $aF\left(\frac{s}{a}\right)$ (d) $\frac{1}{a}F\left(\frac{a}{s}\right)$

2. $F(s) = F[f(x)]$ எனில் $F[xf(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

(அ) $(-1)\frac{d[F(s)]}{ds}$ (ஆ) $i\frac{d[F(s)]}{ds}$

(இ) $(-i)\frac{d[F(s)]}{ds}$ (ஈ) $i\frac{d[F(s)]}{ds}$

If $F(s) = F[f(x)]$, then $F[xf(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

(a) $(-1)\frac{d[F(s)]}{ds}$ (b) $i\frac{d[F(s)]}{ds}$

(c) $(-i)\frac{d[F(s)]}{ds}$ (d) $\frac{d[F(s)]}{ds}$

3. $F_c[f'(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

(அ) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0) + sF_s(s)$ (ஆ) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0) + sF_c(s)$

(இ) $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0) + sF_c(s)$ (ஈ) $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0) + sF_s(s)$

$F_c[f'(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

(a) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0) + sF_s(s)$ (b) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0) + sF_c(s)$

(c) $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0) + sF_c(s)$ (d) $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0) + sF_s(s)$

4. $F_s[e^{-x}] = \underline{\hspace{2cm}}$.

(A) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ (B) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

(C) $\sqrt{2\pi}$ (D) $\sqrt{\pi}$

$F_s[e^{-x}] = \underline{\hspace{2cm}}$.

(a) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ (b) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

(c) $\sqrt{2\pi}$ (d) $\sqrt{\pi}$

5. $(0, \pi)$ - \otimes $F_c[x] = \underline{\hspace{2cm}}$.

(A) $\frac{1}{n}[(-1)^n - 1]$ (B) $\frac{1}{n^2}[(-1)^n - 1]$

(C) $\frac{1}{n^2}(-1)^n$ (D) $\frac{1}{n^2}[(-1)^n + 1]$

$F_c[x] = \underline{\hspace{2cm}}$ in $(0, \pi)$ is $\underline{\hspace{2cm}}$.

(a) $\frac{1}{n}[(-1)^n - 1]$ (b) $\frac{1}{n^2}[(-1)^n - 1]$

(c) $\frac{1}{n^2}(-1)^n$ (d) $\frac{1}{n^2}[(-1)^n + 1]$

6. $(0, l)$ இல் $F_s[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

(அ) $\int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ (ஆ) $2 \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$

(இ) $\int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ (ஈ) $2 \int_0^l \frac{f(x)}{l} \sin n\pi x dx$

$F_s[f(x)]$ in $(0, l) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(a) $\int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ (b) $2 \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$

(c) $\int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ (d) $2 \int_0^l \frac{f(x)}{l} \sin n\pi x dx$

7. $Z[a^{n-1}] = \underline{\hspace{2cm}}$.

(அ) $\frac{z}{z+a}$ (ஆ) $\frac{1}{z+a}$

(இ) $\frac{z}{z-a}$ (ஈ) $\frac{1}{z-a}$

$Z[a^{n-1}] = \underline{\hspace{2cm}}$.

(a) $\frac{z}{z+a}$ (b) $\frac{1}{z+a}$

(c) $\frac{z}{z-a}$ (d) $\frac{1}{z-a}$

8. $Z\left[\sin \frac{n\pi}{2}\right] = \text{_____}.$

(A) $\frac{z^2}{z+1}$ (B) $\frac{z}{z+1}$

(C) $\frac{z}{z^2+1}$ (D) $\frac{z}{z^2-1}$

$Z\left[\sin \frac{n\pi}{2}\right] = \text{_____}.$

(a) $\frac{z^2}{z+1}$ (b) $\frac{z}{z+1}$

(c) $\frac{z}{z^2+1}$ (d) $\frac{z}{z^2-1}$

9. $Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right] = \text{_____}.$

(A) $n-1$ (B) n

(C) $n+1$ (D) n^2

$Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right] = \text{_____}.$

(a) $n-1$ (b) n

(c) $n+1$ (d) n^2

10. $Z^{-1}\left[\frac{1}{(z-2)^2}\right] = \text{_____},$ (இதில் $k \geq 1$)

(அ) $(k-1)2^{k-1}$ (ஆ) $(k-1)(2)^{k-1}$

(இ) $\frac{k(2)^{k-1}}{2}$ (ஈ) $\frac{2^{(k-1)}}{2k}$

For $k \geq 1$, $Z^{-1}\left[\frac{1}{(z-2)^2}\right] = \text{_____}.$

(a) $(k-1)2^{k-1}$ (b) $(k-1)(2)^{k-1}$

(c) $\frac{k(2)^{k-1}}{2}$ (d) $\frac{2^{(k-1)}}{2k}$

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$ எனில் $f(x)$ -இன் ஃபூரியர்

உருமாற்றத்தைக் காண்க.

Find the Fourier transform of

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{in } |x| < a \\ 0 & \text{in } |x| > a \end{cases}.$$

Or

(ஆ) ஃபூரியர் உருமாற்றத்திற்கான பார்சிவேலின் அடையாளத் தேற்றத்தை கூறி நிறுவுக.

State and prove the Parseval's identify for Fourier Transform.

12. (அ) $f(x) = xe^{-x^2/2}$ ஆனது ஃபூரியர் சைன் உருமாற்றத்தைப் பொறுத்து சுய தலைகீழி என காட்டுக.

Show that $f(x) = xe^{-x^2/2}$ is self reciprocal w.r.to. Fourier sine transform.

Or

(ஆ) உருமாற்றங்களைப் பயன்படுத்தி

$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

Evaluate $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$ using transforms.

13. (அ) $f(x) = \cos kx$ இன் முடிவுள்ள ஃபூரியர் சைன் உருமாற்றத்தை $0 < x < \pi$ -இல் காண்க.

Find the finite Fourier Sine transform of $f(x) = \cos kx$ in $0 < x < \pi$.

Or

(ஆ) $f(x) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)^2$ -இன் முடிவுள்ள ஃபூரியர்

கோசைன் உருமாற்றத்தை $0 < x < \pi$ -இல் காண்க.

Find the finite Fourier Cosine transform of

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)^2 \text{ in } 0 < x < \pi.$$

14. (அ) $Z[f(n+m)] = Z^m F(Z) - \sum_{i=0}^{m-1} f(i)Z^{m-i}, \quad n \geq -m$

என நிறுவுக.

Prove that $Z[f(n+m)] = Z^m F(Z) - \sum_{i=0}^{m-1} f(i)Z^{m-i},$

$$n \geq -m.$$

Or

(ஆ) $Z\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$ -இன் மதிப்பைக் காண்க.

Find $Z\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$

15. (அ) $Z^{-1}\left[\frac{1}{1-1.5Z^{-1}-0.5Z^{-2}}\right]$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

Find $Z^{-1}\left[\frac{1}{1-1.5Z^{-1}-0.5Z^{-2}}\right].$

Or

(ஆ) $Z^{-1}\left[\frac{z^3}{(z-1)^2(z-2)}\right]$ -இன் மதிப்பைக் காண்க.

Find $Z^{-1}\left[\frac{z^3}{(z-1)^2(z-2)}\right]$.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) $f(x) = e^{-a|x|}$ -இன் ஃபூரியர் உருமாற்றத்தைக் காண்க. மேலும்

(i) $\int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{a^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2a} e^{-a|x|}$ எனவும்

(ii) $F[xe^{-a|x|}] = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$ எனவும் தருவி.

Find the Fourier Transform of $f(x) = e^{-a|x|}$ and hence deduce that

(i) $\int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{a^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2a} e^{-a|x|}$.

(ii) $F[xe^{-a|x|}] = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$.

Or

(ஆ) $f(x) = \begin{cases} a^2 - x^2, & |x| < a \\ 0, & |x| > a > 0 \end{cases}$ இன் ஃபூரியர்

உருமாற்றம் $2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin as - as \cos as}{s^3} \right)$

எனக்காட்டு. மேலும் $\int_0^{\infty} \frac{\sin t - t \cos t}{t^3} dt = \frac{\pi}{4}$

எனவும் பார்சிவேலின் அடையாளத்தை

பயன்படுத்தி $\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin t - t \cos t}{t^3} \right)^2 dt = \frac{\pi}{15}$ எனவும்

நிரூபி.

Show that the Fourier transform of

$$f(x) = \begin{cases} a^2 - x^2, & |x| < a \\ 0, & |x| > a > 0 \end{cases}$$

is $2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin as - as \cos as}{s^3} \right)$. Hence deduce that

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t - t \cos t}{t^3} dt = \frac{\pi}{4} \text{ using Parseval's identity}$$

show that $\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin t - t \cos t}{t^3} \right)^2 dt = \frac{\pi}{15}.$

17. (அ) $f(x) = \frac{e^{-ax}}{x}$ என்ற சார்பின் ஃபூரியர் சைன் உருமாற்றத்தைக் காண்க.

Find the Fourier sine transform of the function $f(x) = \frac{e^{-ax}}{x}$.

Or

- (ஆ) $f(x) = e^{-a^2x^2}$ என்ற சார்பின் ஃபூரியர் கோசைன் உருமாற்றத்தைக் காண்க. மேலும் $F_s[xe^{-a^2x^2}]$ மதிப்பைக் காண்க.

Find the Fourier cosine transform of $f(x) = e^{-a^2x^2}$ and hence find $F_s[xe^{-a^2x^2}]$.

18. (அ) $f(x) = x^2$ என்ற சார்பின் முடிவுள்ள ஃபூரியர் சைன் மற்றும் ஃபூரியர் கோசைன் உருமாற்றங்களை $0 < x < l$ என்ற இடைவெளியில் காண்க.

Find the finite Fourier sine and cosine transform of $f(x) = x^2$ in $0 < x < l$.

Or

- (ஆ) $(0, l)$ -இல் $f(x) = e^{ax}$ என்ற சார்பின் முடிவுள்ள ஃபூரியர் சைன் மற்றும் ஃபூரியர் கோசைன் உருமாற்றங்களைக் காண்க.

Find the finite Fourier sine and cosine transform of $f(x) = e^{ax}$ in $(0, l)$.

19. (அ) $Z[na^n]$ மற்றும் $Z[(-2)^n]$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

Find $Z(na^n)$ and $Z[(-2)^n]$.

Or

- (ஆ) இறுதிமதிப்பு (கடைநிலை மதிப்பு) தேற்றத்தை கூறி நிறுவுக.

State and prove

20. (அ) $Z^{-1}\left[\frac{z^2+2z}{z^2+2z+4}\right]$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

Find $Z^{-1}\left[\frac{z^2+2z}{z^2+2z+4}\right]$.

Or

- (ஆ) எச்ச தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி

$Z^{-1}\left[\frac{z^2-3z}{(z-5)(z+2)}\right]$ -இன் மதிப்பைக் காண்க.

Find $Z^{-1}\left[\frac{z^2-3z}{(z-5)(z+2)}\right]$ using residue theorem.